Generalizaciones del modelo de Kitaev

Fismat Days

Jorge Acuña Flores

Facultad de Matemáticas

17 de Diciembre de 2024

Dos Tipos de Errores

Suponemos que cualquier error puede descomponerse en una suma de operadores de la forma cX^jZ^k con $c \in \mathbb{C}$, $j, k \in \{0, 1\}$ y X, Z las matrices de Pauli usuales. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar dos tipos de errores, el tipo X y el tipo Z.

Dos Tipos de Errores

Suponemos que cualquier error puede descomponerse en una suma de operadores de la forma cX^jZ^k con $c \in \mathbb{C}$, $j, k \in \{0, 1\}$ y X, Z las matrices de Pauli usuales. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar dos tipos de errores, el tipo X y el tipo Z.De hecho, si $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ es un estado general de un solo qubit, al aplicar X obtenemos el estado

$$X|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$$

es decir, se aplica una inversión de bit a nuestro estado.

Dos Tipos de Errores

Suponemos que cualquier error puede descomponerse en una suma de operadores de la forma cX^jZ^k con $c \in \mathbb{C}$, $j, k \in \{0, 1\}$ y X, Z las matrices de Pauli usuales. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar dos tipos de errores, el tipo X y el tipo Z.De hecho, si $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ es un estado general de un solo qubit, al aplicar X obtenemos el estado

$$X|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$$

es decir, se aplica una inversión de bit a nuestro estado. Y si aplicamos Z obtenemos

$$Z|\psi\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle$$

es decir, aplicamos una inversión de fase.

Metodo de Estabilizadores

La idea es utilizar un conjunto de operadores (llamados estabilizadores) para detectar errores cuánticos. Los estabilizadores son operadores hermíticos que conmutan entre sí, es decir, si S_i y S_j son estabilizadores, entonces

$$[S_i, S_j] = 0$$

Denotamos el conjunto de estos operadores por $\mathcal{S}$.

Metodo de Estabilizadores

La idea es utilizar un conjunto de operadores (llamados estabilizadores) para detectar errores cuánticos. Los estabilizadores son operadores hermíticos que conmutan entre sí, es decir, si S_i y S_j son estabilizadores, entonces

$$[S_i, S_j] = 0$$

Denotamos el conjunto de estos operadores por $\mathcal{S}$.
Definimos el espacio protegido (denotado por $\mathfrak{C}$) como el subespacio común de autovector con autovalor $+1$ de todos los operadores en el espacio de estabilizadores. Esto significa

$$\mathfrak{C} = \{|\psi\rangle : S|\psi\rangle = |\psi\rangle ; \forall S \in \mathcal{S}\}$$

Este espacio va a representar el espacio de información protegida de errores.

Una compuerta lógica L es un operador unitario que conmute con todos los estabilizadores. Note que si S es un estabilizador, entonces para todo $|\psi\rangle$ en el espacio base

$$SL|\psi\rangle = LS|\psi\rangle = L|\psi\rangle$$

por lo que $L|\psi\rangle$ está en el estado base.

Una compuerta lógica L es un operador unitario que conmute con todos los estabilizadores. Note que si S es un estabilizador, entonces para todo $|\psi\rangle$ en el espacio base

$$SL|\psi\rangle = LS|\psi\rangle = L|\psi\rangle$$

por lo que $L|\psi\rangle$ está en el estado base. Además, note que $L|\psi\rangle = LS|\psi\rangle$. Por lo tanto, podemos identificar L con LS donde S es un estabilizador arbitrario. El álgebra de operadores lógicos (denotada por $\mathfrak{A}_{logical}$) será el álgebra generada por los cosets. Esta álgebra solo depende de la topología, y determinará el número de qubits que podemos proteger.

Toric Code

Este modelo considera un retículo cuadrado de $k \times k$ sobre un toro. Luego, colocamos un espín (o un qubit) a cada arista del retículo. Por lo tanto, tenemos $n = 2^{k^2}$ qubits.
Además, introducimos el concepto de *retículo dual*. Este es un retículo que conecta los centros de las caras.

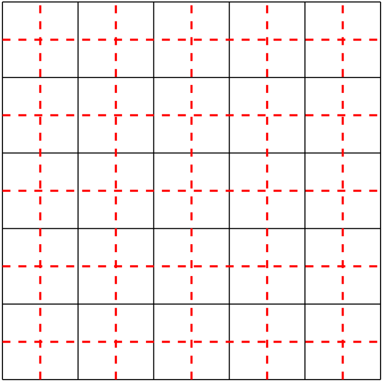


Figura: Retículo (en gris) y reticulado dual (en rojo)

Definimos dos operadores. Los operdores estrella A_v y los operadores plaqueta B_p

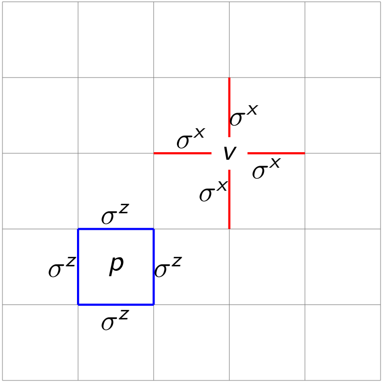
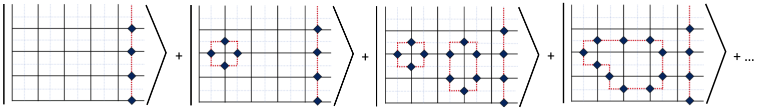


Figura: operadores A_v y B_p

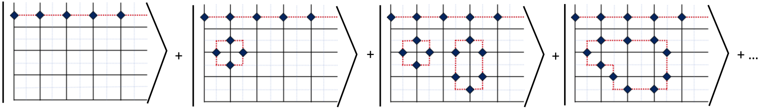
Y el Hamiltoniano $H := -\sum_v A_v - \sum_p B_p$

La dimensión del espacio generado por los estados fundamentales es 4. Una base de este espacio es

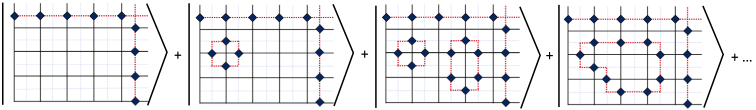
$|\psi_1\rangle$ =



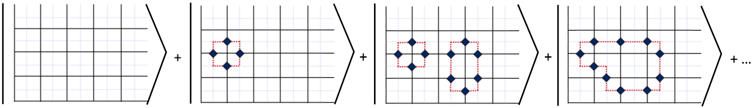
$|\psi_2\rangle$ =



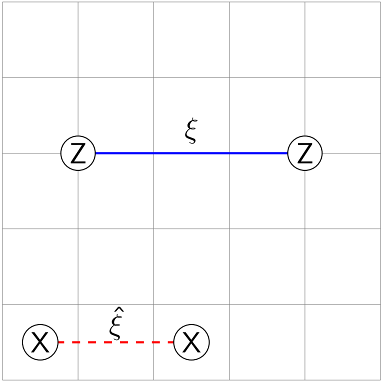
$|\psi_3\rangle$ =



$|\psi_4\rangle$ =



Estudiamos dos tipos de excitaciones. La de tipo Z generada por el operador F_ξ que aplica matrices σ^z a lo largo del camino ξ. Y la de tipo X creada por el operador $F_{\hat{\xi}}$ que aplica matrices de tipo σ^x a lo largo de camino dual $\hat{\xi}$ (esto significa que cada vez que el camino dual cruza una arista, en esa arista se aplica una matriz σ^x).



Notar que F_ξ anticonmuta con A_{v_1} y A_{v_2} donde v_1, v_2 son los extremos de ξ. Asi, para un estado fundamental $|\psi\rangle$

$$HF_\xi|\psi\rangle = F_\xi(H + 2A_{v_1} + 2A_{v_2})|\psi\rangle = (E_0 + 4)F_\xi|\psi\rangle$$

donde E_0 es la energia de $|\psi\rangle$.

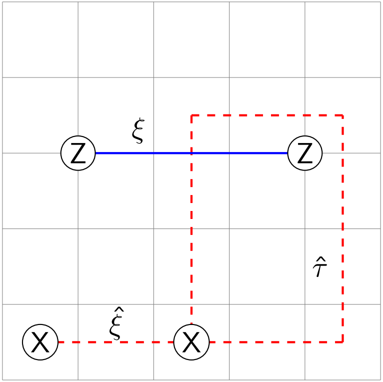
Notar que F_ξ anticonmuta con A_{v_1} y A_{v_2} donde v_1, v_2 son los extremos de ξ. Asi, para un estado fundamental $|\psi\rangle$

$$HF_\xi|\psi\rangle = F_\xi(H + 2A_{v_1} + 2A_{v_2})|\psi\rangle = (E_0 + 4)F_\xi|\psi\rangle$$

donde E_0 es la energia de $|\psi\rangle$.
Analogamente para $F_{\hat{\xi}}$ tenemos que

$$HF_{\hat{\xi}}|\psi\rangle = F_{\hat{\xi}}(H + 2B_{p_1} + 2B_{p_2})|\psi\rangle = (E_0 + 4)F_{\hat{\xi}}|\psi\rangle$$

Concatenando caminos, podemos mover una excitación alrededor de la otra



y obtenemos que

$$|\psi_{inicial}\rangle = -|\psi_{final}\rangle$$

Complejos Simpliciales

Tomemos un lattice K de dimensión N y descompongámoslo como $K = \sqcup_{n=0}^{N} K_n$. Cada K_n contiene los $n-$simplexos del lattice (K_0 son los vértices, K_1 aristas, K_2 triángulos, etc.). Sea C_n el grupo libre formado por K_n.

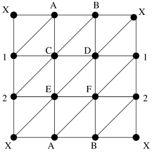


Figura: Triangulación de un Toro

Complejos Simpliciales

Tomemos un lattice K de dimensión N y descompongámoslo como $K = \sqcup_{n=0}^{N} K_n$. Cada K_n contiene los $n-$simplexos del lattice (K_0 son los vértices, K_1 aristas, K_2 triángulos, etc.). Sea C_n el grupo libre formado por K_n.

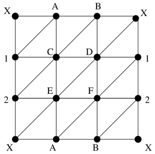


Figura: Triangulación de un Toro

También, consideramos el complejo de cadenas $(G_\bullet, \partial_\bullet^G)$. Esta es una secuencia de grupos abelianos finitos $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con morfismos de grupos $\partial_n^G : G_n \to G_{n-1}$ tal que la composición de dos de estos morfismos es cero, ie. $\partial_n^G \circ \partial_{n+1}^G = 0$.

Definición

Un p-mapa $f : (C_\bullet, \partial_\bullet^C) \to (G_\bullet, \partial_\bullet^G)$ *es una secuencia de morfismos* $f_n : C_n \to G_{n-p}$.

El conjunto de todos los p-mapas, denotado por $hom(C, G)^p$, se define como sigue.
De manera diagramática, un elemento f de $hom(C, G)^0$ puede ser representado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}^C"] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^C"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n^C"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}^C"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}^G"'] & G_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^G"'] & G_n \arrow[r, "\partial_n^G"'] & G_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}^G"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definición

Un p-mapa $f : (C_\bullet, \partial^C_\bullet) \to (G_\bullet, \partial^G_\bullet)$ *es una secuencia de morfismos* $f_n : C_n \to G_{n-p}$.

El conjunto de todos los p-mapas, denotado por $hom(C, G)^p$, se define como sigue.
De manera diagramática, un elemento f de $hom(C, G)^0$ puede ser representado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^C_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial^C_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial^C_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial^C_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^G_{n+2}"'] & G_{n+1} \arrow[r, "\partial^G_{n+1}"'] & G_n \arrow[r, "\partial^G_n"'] & G_{n-1} \arrow[r, "\partial^G_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definición

Definimos $\delta^p : hom(C, G)^p \to hom(C, G)^{p+1}$ *que satisface*

$$(\delta^p f)_n = f_{n-1}\partial^C_n - (-1)^p \partial^G_{n-p} f_n$$

Observa que $(\hom(C,G)^\bullet, \delta^\bullet)$ forma un complejo de co-cadenas:

$$\cdots \leftarrow \hom(C,G)^{p+2} \xleftarrow{\delta^{p+1}} \hom(C,G)^{p+1} \xleftarrow{\delta^{p}} \hom(C,G)^{p} \leftarrow \cdots \quad , \tag{1}$$

Los grupos de cohomología obtenidos de $(\hom(C,G)^\bullet, \delta^\bullet)$ son denotados por $H^p(C,G) := \ker \delta^p / \mathrm{im}\ \delta^{p-1}$

Definimos el p-mapa dual γ como una secuencia de morfismos $\gamma_n : C_n \to \hat{G}_{n-p}$. Denotamos el conjunto de todos los p-mapas duales como $hom(C, G)_p$.

Definición

Definimos el adjunto de ∂_n^G como $\hat{\partial}_n^G : \hat{G}_{n-1} \to \hat{G}_n$ donde $\hat{\partial}_n^G(\alpha) = \alpha \circ \partial_n^G$.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[dr, "\gamma_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[l] \arrow[dr, "\gamma_{n+1}"] & C_n \arrow[l, "\hat{\partial}^C_{n+1}"'] \arrow[dr, "\gamma_n"] & C_{n-1} \arrow[l, "\hat{\partial}^C_n"'] \arrow[dr, "\gamma_{n-1}"] & \cdots \arrow[l, "\hat{\partial}^C_{n-1}"'] \\
\cdots & \hat{G}_{n+1} \arrow[l] & \hat{G}_n \arrow[l, "\hat{\partial}^G_{n+1}"] & \hat{G}_{n-1} \arrow[l, "\hat{\partial}^G_n"] & \cdots \arrow[l, "\hat{\partial}^G_{n-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Definimos el p-mapa dual γ como una secuencia de morfismos $\gamma_n : C_n \to \hat{G}_{n-p}$. Denotamos el conjunto de todos los p-mapas duales como $hom(C, G)_p$.

Definición

Definimos el adjunto de ∂_n^G como $\hat{\partial}_n^G : \hat{G}_{n-1} \to \hat{G}_n$ donde $\hat{\partial}_n^G(\alpha) = \alpha \circ \partial_n^G$.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[dr, "\gamma_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[l] \arrow[dr, "\gamma_{n+1}"] & C_n \arrow[l, "\hat{\partial}^C_{n+1}"'] \arrow[dr, "\gamma_n"] & C_{n-1} \arrow[l, "\hat{\partial}^C_n"'] \arrow[dr, "\gamma_{n-1}"] & \cdots \arrow[l, "\hat{\partial}^C_{n-1}"'] \\
\cdots & \hat{G}_{n+1} \arrow[l] & \hat{G}_n \arrow[l, "\hat{\partial}^G_{n+1}"] & \hat{G}_{n-1} \arrow[l, "\hat{\partial}^G_n"] & \cdots \arrow[l, "\hat{\partial}^G_{n-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Definición

Para $\gamma \in hom(C, G)_p$, definimos

$$(\delta_p \gamma)_n = (\gamma_{n+1} \circ \hat{\partial}^C_{n+1}) - (1)^p (\hat{\partial}^G_{n+1-p} \circ \gamma_n)$$

donde $\hat{\partial}_n^C$ y $\hat{\partial}_n^G$ son los adjuntos de ∂_n^C y ∂_n^G respectivamente.

Estos mapas hacen que $(hom(C,G)_\bullet, \delta_\bullet)$ sea un complejo de cadenas.

$$\cdots \to \hom(C,G)_{p+1} \xrightarrow{\delta_{p+1}} \hom(C,G)_p \xrightarrow{\delta_p} \hom(C,G)_{p-1} \to \cdots \quad , \tag{2}$$

Definimos los grupos de homología como $H_p(C,G) := \ker \delta_p / \mathrm{im}\ \delta_{p+1}$.

Sea $f \in hom(C, G)^0$ y $\gamma \in hom(C, G)_0$ (con al menos uno de ellos con soporte finito). Definimos

$$\gamma(f) := \prod_{x \in K} [\gamma(f)]_x$$

donde $[\gamma(f)]_x := \gamma_n(x)(f_n(x))$ para $x \in K_n$.

Sea $f \in hom(C,G)^0$ y $\gamma \in hom(C,G)_0$ (con al menos uno de ellos con soporte finito). Definimos

$$\gamma(f) := \prod_{x \in K} [\gamma(f)]_x$$

donde $[\gamma(f)]_x := \gamma_n(x)(f_n(x))$ para $x \in K_n$. Si $f \in hom(C,G)^p$ y $\gamma \in hom(C,G)_{p+1}$ con al menos uno de ellos con soporte finito, entonces

$$\gamma(\delta^p f) = (\delta_{p+1}\gamma)(f)$$

EL Modelo

Para un $x \in K_n$, consideramos el espacio vectorial de dimensión finita $\mathfrak{H}_x := L^2(G_n)$. En este espacio, consideramos la base ortonormal $\{|g\rangle\}_{g \in G_n}$. Sea Λ un subconjunto finito de K, y lo denotaremos como $\Lambda \subset_f K$. Definimos

$$\mathfrak{H}_\Lambda := \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathfrak{H}_x$$

EL Modelo

Para un $x \in K_n$, consideramos el espacio vectorial de dimensión finita $\mathfrak{H}_x := L^2(G_n)$. En este espacio, consideramos la base ortonormal $\{|g\rangle\}_{g \in G_n}$. Sea Λ un subconjunto finito de K, y lo denotaremos como $\Lambda \subset_f K$. Definimos

$$\mathfrak{H}_\Lambda := \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathfrak{H}_x$$

Definimos $\mathfrak{A}_\Lambda := \mathcal{B}(\mathfrak{H}_\Lambda)$, el espacio de operadores acotados sobre $\mathfrak{H}_\Lambda$. Si $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, existe una inclusión natural $i_{\Lambda_2,\Lambda_1} : \mathfrak{A}_{\Lambda_1} \hookrightarrow \mathfrak{A}_{\Lambda_2}$ que mapea $A \mapsto A \otimes I_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}$. Para esta red de álgebras, definimos el álgebra local de observables y el álgebra cuasi-local de observables como, respectivamente,

$$\mathfrak{A}_{loc} := \bigcup_{\Lambda \subset_f K} \mathfrak{A}_\Lambda, \qquad \mathfrak{A} := \overline{\mathfrak{A}_{loc}}^{\|\cdot\|}$$

Para un $x \in K_n$, consideramos el espacio vectorial de dimensión finita $\mathfrak{H}_x := L^2(G_n)$. En este espacio, consideramos la base ortonormal $\{|g\rangle\}_{g \in G_n}$. Sea Λ un subconjunto finito de K, y lo denotaremos como $\Lambda \subset_f K$. Definimos

$$\mathfrak{H}_\Lambda := \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathfrak{H}_x$$

Definimos $\mathfrak{A}_\Lambda := \mathcal{B}(\mathfrak{H}_\Lambda)$, el espacio de operadores acotados sobre $\mathfrak{H}_\Lambda$. Si $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, existe una inclusión natural $i_{\Lambda_2,\Lambda_1} : \mathfrak{A}_{\Lambda_1} \hookrightarrow \mathfrak{A}_{\Lambda_2}$ que mapea $A \mapsto A \otimes I_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}$. Para esta red de álgebras, definimos el álgebra local de observables y el álgebra cuasi-local de observables como, respectivamente,

$$\mathfrak{A}_{loc} := \bigcup_{\Lambda \subset_f K} \mathfrak{A}_\Lambda, \qquad \mathfrak{A} := \overline{\mathfrak{A}_{loc}}^{\|\cdot\|}$$

Para $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_x)$, usamos la notación A_x para referirnos al operador correspondiente actuando en el sitio x.

Sea $x \in K_n \subset K$. Sea $|h\rangle$ un elemento de $\mathfrak{H}_x$. Para $g \in G_n$ y $\gamma \in \hat{G}_n$, definimos

$$P_g|h\rangle = |g + h\rangle \qquad Q_\gamma|h\rangle = \gamma(h)|h\rangle$$

Sea $x \in K_n \subset K$. Sea $|h\rangle$ un elemento de $\mathfrak{H}_x$. Para $g \in G_n$ y $\gamma \in \hat{G}_n$, definimos

$$P_g|h\rangle = |g+h\rangle \qquad Q_\gamma|h\rangle = \gamma(h)|h\rangle$$

Para $t \in hom(C,G)^0_f$ y para $\gamma \in hom(C,G)^f_0$, definimos

$$P_t := \prod_{\substack{n \\ x \in K_n}} (P_{f_n(x)})_x \qquad Q_\gamma := \prod_{\substack{n \\ x \in K_n}} (Q_{\gamma_n(x)})_x$$

donde $(P_{f_n(x)})_x$ y $(Q_{\gamma_n(x)})_x$ significa que estos operadores actúan solo sobre x.
Además, satisfacen que

$$Q_\gamma P_t = \gamma(t) P_t Q_\gamma$$

Definición (Operadores Locales)

Sea $x \in K_n$

$$A_x^0 := \frac{1}{|G_{n+1}|} \sum_{g \in G_{n+1}} P_{\delta^{-1} gx^*} \qquad B_x^0 := \frac{1}{|G_{n-1}|} \sum_{\gamma \in \hat{G}_{n-1}} Q_{\delta_1 \gamma x_*}$$

donde gx^* *es una asignación que asocia* g *con* x *y* 0 *con todos los demás elementos del complejo simplicial. Y* γx_* *es un mapa dual que envía* x *a* γ *y* 0 *en otros casos.*

Definición (Operadores Locales)

Sea $x \in K_n$

$$A_x^0 := \frac{1}{|G_{n+1}|} \sum_{g \in G_{n+1}} P_{\delta^{-1} g x^*} \qquad B_x^0 := \frac{1}{|G_{n-1}|} \sum_{\gamma \in \hat{G}_{n-1}} Q_{\delta_1 \gamma x_*}$$

donde gx^* *es una asignación que asocia* g *con* x *y* 0 *con todos los demás elementos del complejo simplicial. Y* γx_* *es un mapa dual que envía* x *a* γ *y* 0 *en otros casos.*

El Hamiltoniano local será

$$H_\Lambda := -\sum_{\substack{x \in K \\ \text{soporte } A_x^0 \subseteq \Lambda}} A_x^0 - \sum_{\substack{y \in K \\ \text{soporte } B_y^0 \subseteq \Lambda}} B_y^0$$

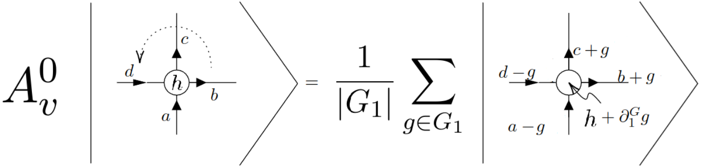
Y para $A \in \mathfrak{A}_\Lambda$, la derivación será

$$\delta(A) = \lim_{\Lambda \to K} i[H_\Lambda, A]$$

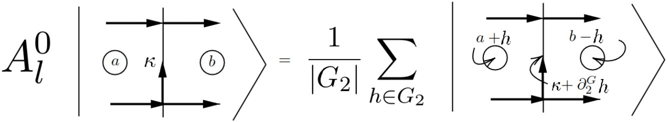
Quantum Double Models

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_2 \arrow[r, "\partial_2^C"] \arrow[d, "f_2"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1^C"] \arrow[d, "f_1"] & C_0 \arrow[r, "\partial_0^C"] \arrow[d, "f_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G_2 \arrow[r, "\partial_2^G"'] & G_1 \arrow[r, "\partial_1^G"'] & G_0 \arrow[r, "\partial_0^G"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

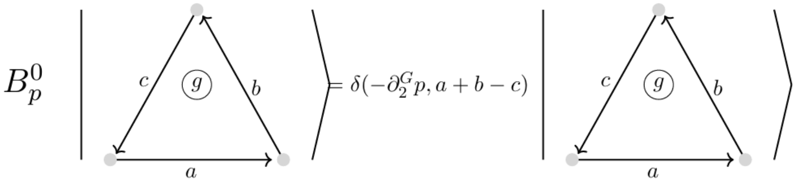
acting over a localized vertex $v \in K_0$ with $h \in G_0$ and $a, b, c, d \in G_1$



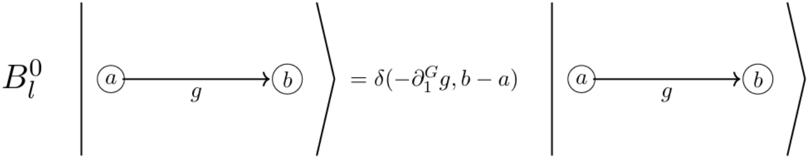
acting over a localized link $l \in K_1$ with $\kappa \in G_1$ and $a, b \in G_2$



acting over a localized plaquette $p \in K_2$ with $g \in G_2$ and $a, b, c \in G_1$



acting over a localized link $l \in K_1$ with $g \in G_1$ and $a, b \in G_0$



Ground States

Un estado en una álgebra C^* es un funcional lineal $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ que es positivo, es decir, $\omega(AA^*) \geq 0$ y $\omega(I) = 1$.
Un estado fundamental es un estado tal que $-i\omega(A^*\delta(A)) \geq 0$ para A en el álgebra local. Un estado ω_0 es un estado fundamental sin frustración si $\omega_0(A_x^0) = \omega_0(B_y^0) = 1$.

Ground States

Un estado en una álgebra C^* es un funcional lineal $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ que es positivo, es decir, $\omega(AA^*) \geq 0$ y $\omega(I) = 1$.
Un estado fundamental es un estado tal que $-i\omega(A^*\delta(A)) \geq 0$ para A en el álgebra local. Un estado ω_0 es un estado fundamental sin frustración si $\omega_0(A_x^0) = \omega_0(B_y^0) = 1$.

Proposición

Sea ω_0 un estado fundamental sin frustración. Entonces, $\omega_0(P_{\delta^{-1}t}Q_{\delta_1\gamma}) = 1$ para todo $t \in hom(C,G)_f^{-1}$ y $\gamma \in hom(C,G)_1^f$.

Un estado en una álgebra C^* es un funcional lineal $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ que es positivo, es decir, $\omega(AA^*) \geq 0$ y $\omega(I) = 1$.
Un estado fundamental es un estado tal que $-i\omega(A^*\delta(A)) \geq 0$ para A en el álgebra local. Un estado ω_0 es un estado fundamental sin frustración si $\omega_0(A_x^0) = \omega_0(B_y^0) = 1$.

Proposición

Sea ω_0 un estado fundamental sin frustración. Entonces, $\omega_0(P_{\delta^{-1}t}Q_{\delta^1\gamma}) = 1$ para todo $t \in hom(C, G)_f^{-1}$ y $\gamma \in hom(C, G)_1^f$.

Definición

Definimos el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{AB}$ como el álgebra C^* generada por los operadores $P_{\delta^{-1}t}$ y $Q_{\delta^1\gamma}$.

En esta álgebra C^*, podemos definir un estado $\omega : \mathfrak{A}_{AB} \to \mathbb{C}$ que satisface $\omega(P_{\delta^{-1}t}Q_{\delta^1\gamma}) = 1$ para todo $t \in hom(C, G)_f^{-1}$ y $\gamma \in hom(C, G)_1^f$. Este estado puede extenderse al álgebra $\mathfrak{A}$, y todas las extensiones son estados fundamentales.

Lema

Sea $\mathfrak{A}$ una C^*-algebra, $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ un estado y $U \in \mathfrak{A}$ un elemento unitario. Si $|\omega(U)| = 1$, entonces para cualquier $Y \in \mathfrak{A}$ se cumple que

$$\omega(U)\omega(Y) = \omega(UY) = \omega(YU)$$

Los operadores $P_t Q_\gamma$ son una base para el álgebra local. Por lo tanto, basta con mostrar cómo actúa ω_0 sobre $P_t Q_\gamma$.

Los operadores $P_t Q_\gamma$ son una base para el álgebra local. Por lo tanto, basta con mostrar cómo actúa ω_0 sobre $P_t Q_\gamma$. Podemos demostrar que,

$$\omega_0(P_t Q_\gamma) = \delta_0 \gamma(-j) \omega_0(P_t Q_\gamma)$$

y esto ocurre para todo $j \in hom(C, G)_f^{-1}$. Entonces, si $\delta_0 \gamma \neq 0$, implica que $\omega_0(P_t Q_\gamma) = 0$.

Los operadores $P_t Q_\gamma$ son una base para el álgebra local. Por lo tanto, basta con mostrar cómo actúa ω_0 sobre $P_t Q_\gamma$. Podemos demostrar que,

$$\omega_0(P_t Q_\gamma) = \delta_0\gamma(-j)\omega_0(P_t Q_\gamma)$$

y esto ocurre para todo $j \in hom(C, G)_f^{-1}$. Entonces, si $\delta_0\gamma \neq 0$, implica que $\omega_0(P_t Q_\gamma) = 0$.De manera análoga,

$$\omega_0(P_t Q_\gamma) = \alpha(\delta^0 t)\omega_0(P_t Q_\gamma)$$

para todo $\alpha \in hom(C, G)_1^f$. Entonces, si $\delta^0 t \neq 0$, implica que $\omega_0(P_t Q_\gamma) = 0$.

Los operadores $P_t Q_\gamma$ son una base para el álgebra local. Por lo tanto, basta con mostrar cómo actúa ω_0 sobre $P_t Q_\gamma$. Podemos demostrar que,

$$\omega_0(P_t Q_\gamma) = \delta_0\gamma(-j)\omega_0(P_t Q_\gamma)$$

y esto ocurre para todo $j \in hom(C, G)_f^{-1}$. Entonces, si $\delta_0\gamma \neq 0$, implica que $\omega_0(P_t Q_\gamma) = 0$.De manera análoga,

$$\omega_0(P_t Q_\gamma) = \alpha(\delta^0 t)\omega_0(P_t Q_\gamma)$$

para todo $\alpha \in hom(C, G)_1^f$. Entonces, si $\delta^0 t \neq 0$, implica que $\omega_0(P_t Q_\gamma) = 0$. Además,

$$\omega_0(P_t Q_\gamma) = \omega_0(A_j P_t Q_\gamma B_\alpha) = \omega_0(P_{t+\delta^{-1}j} Q_{\gamma+\delta_1\alpha})$$

Por lo tanto, el estado fundamental depende de la clase de t en $H^0(C, G)$ y de la clase de γ en $H_0(C, G)$.

Ahora, observemos que $\mathfrak{A}'_{AB}$ es igual a la clausura de *span*$\{P_t Q_\gamma;\ \text{con}\ \delta^0 t = 0, \delta_0 \gamma = 0\}$. Con esto, podemos ver que cualquier estado τ en $\mathfrak{A}'_{AB}$ que sea igual a ω en $\mathfrak{A}_{AB}$ puede extenderse de manera única a un estado ω_0 en $\mathfrak{A}$. Este estado es determinado de manera única por los valores en $P_t Q_\gamma$.

Ahora, observemos que $\mathfrak{A}'_{AB}$ es igual a la clausura de $span\{P_tQ_\gamma;\ \text{con}\ \delta^0 t = 0, \delta_0\gamma = 0\}$. Con esto, podemos ver que cualquier estado τ en $\mathfrak{A}'_{AB}$ que sea igual a ω en $\mathfrak{A}_{AB}$ puede extenderse de manera única a un estado ω_0 en $\mathfrak{A}$. Este estado es determinado de manera única por los valores en P_tQ_γ.
Si $P_tQ_\gamma \in \mathfrak{A}'_{AB}$, entonces $\omega_0(P_tQ_\gamma) = \tau(P_tQ_\gamma)$. Si $P_tQ_\gamma \notin \mathfrak{A}'_{AB}$, entonces $\omega_0(P_tQ_\gamma) = 0$.

Ahora, observemos que $\mathfrak{A}'_{AB}$ es igual a la clausura de $span\{P_t Q_\gamma;\ \text{con } \delta^0 t = 0, \delta_0\gamma = 0\}$. Con esto, podemos ver que cualquier estado τ en $\mathfrak{A}'_{AB}$ que sea igual a ω en $\mathfrak{A}_{AB}$ puede extenderse de manera única a un estado ω_0 en $\mathfrak{A}$. Este estado es determinado de manera única por los valores en $P_t Q_\gamma$.
Si $P_t Q_\gamma \in \mathfrak{A}'_{AB}$, entonces $\omega_0(P_t Q_\gamma) = \tau(P_t Q_\gamma)$. Si $P_t Q_\gamma \notin \mathfrak{A}'_{AB}$, entonces $\omega_0(P_t Q_\gamma) = 0$.
En conclusión, existe una biyección entre los estados en $\mathfrak{A}'_{AB}$ que se restringen a ω en $\mathfrak{A}_{AB}$ y los estados fundamentales sin frustración en $\mathfrak{A}$ (ambos están determinados por los valores en $P_t Q_\gamma$ con $\delta^0 t = 0$ y $\delta_0 \gamma = 0$).

Ahora, observemos que $\mathfrak{A}'_{AB}$ es igual a la clausura de $span\{P_tQ_\gamma;\ \text{con } \delta^0 t = 0, \delta_0\gamma = 0\}$. Con esto, podemos ver que cualquier estado τ en $\mathfrak{A}'_{AB}$ que sea igual a ω en $\mathfrak{A}_{AB}$ puede extenderse de manera única a un estado ω_0 en $\mathfrak{A}$. Este estado es determinado de manera única por los valores en P_tQ_γ.
Si $P_tQ_\gamma \in \mathfrak{A}'_{AB}$, entonces $\omega_0(P_tQ_\gamma) = \tau(P_tQ_\gamma)$. Si $P_tQ_\gamma \notin \mathfrak{A}'_{AB}$, entonces $\omega_0(P_tQ_\gamma) = 0$.
En conclusión, existe una biyección entre los estados en $\mathfrak{A}'_{AB}$ que se restringen a ω en $\mathfrak{A}_{AB}$ y los estados fundamentales sin frustración en $\mathfrak{A}$ (ambos están determinados por los valores en P_tQ_γ con $\delta^0 t = 0$ y $\delta_0\gamma = 0$).
Ahora, denote por
$J := \overline{span\{P_tQ_\gamma - P_{t+\delta^{-1}j}Q_{\gamma+\delta_1\alpha}; \delta^0 t = 0, \delta_0\gamma = 0\}}$. J es un ideal en $\mathfrak{A}'_{AB}$.
Definimos $\mathfrak{A}_{logical} := \mathfrak{A}'_{AB}/J$.

Teorema

Los estados fundamentales sin frustración están en una biyección uno a uno con los estados en $\mathfrak{A}_{logical}$.

Observa que dos productos $P_t Q_\gamma$ y $P_{t'} Q_{\gamma'}$ se mapean al mismo elemento en $\mathfrak{A}_{logical}$ si y solo si t, t' están en la clase de H^0, y γ, γ' están en la misma clase de H_0. Por lo tanto, podemos denotar ese elemento en $\mathfrak{A}_{logical}$ por $P_{[t]} Q_{[\gamma]}$.

Observa que dos productos $P_t Q_\gamma$ y $P_{t'} Q_{\gamma'}$ se mapean al mismo elemento en $\mathfrak{A}_{logical}$ si y solo si t, t' están en la clase de H^0, y γ, γ' están en la misma clase de H_0. Por lo tanto, podemos denotar ese elemento en $\mathfrak{A}_{logical}$ por $P_{[t]} Q_{[\gamma]}$. Usando que

$$\left(P_{[t]} Q_{[\gamma]}\right) \left(P_{[s]} Q_{[\alpha]}\right) = \gamma(s) P_{[t+s]} Q_{[\gamma+\alpha]}$$

podemos ver a $\mathfrak{A}_{logical}$ como un álgebra de relaciones canónicas de conmutación.

Observa que dos productos $P_t Q_\gamma$ y $P_{t'} Q_{\gamma'}$ se mapean al mismo elemento en $\mathfrak{A}_{logical}$ si y solo si t, t' están en la clase de H^0, y γ, γ' están en la misma clase de H_0. Por lo tanto, podemos denotar ese elemento en $\mathfrak{A}_{logical}$ por $P_{[t]} Q_{[\gamma]}$. Usando que

$$\left(P_{[t]} Q_{[\gamma]}\right) \left(P_{[s]} Q_{[\alpha]}\right) = \gamma(s) P_{[t+s]} Q_{[\gamma+\alpha]}$$

podemos ver a $\mathfrak{A}_{logical}$ como un álgebra de relaciones canónicas de conmutación.

El espacio $H := H^0 \times H_0$ caracteriza el espacio de estados fundamentales, en el sentido de que cada estado fundamental ω_0 está completamente determinado por el valor que toma en los operadores de la forma $P_{[t]} Q_{[\gamma]}$ con $[t] \in H^0$ y $[\gamma] \in H_0$.

Lemma

Sea $H := H^0 \times H_0$. *Sea* $(\cdot,\cdot) : H \times H \to S^1$ *tal que*

$$(([t],[\gamma]),([s],[\alpha])) = \gamma(s)$$

Para cada $h \in H$, *sea* $W(h)$ *el operador que actúa sobre* $L^2(H)$ *como* $W(h)|h'\rangle = (h,h')|h+h'\rangle$. *Sea* $\mathfrak{A} \leq \mathcal{B}(L^2(H))$ *el álgebra de* C^* *generada por los operadores* $W(h)$. *Sea*

$$S := \{h \in H \mid \forall h' \in H, (h,h') = (h',h)\}$$

y definimos $c = \log_2 |S|$, $q = \frac{1}{2}\log_2 \frac{|H|}{|S|}$. *Entonces,*

$$\mathfrak{A}_{logical} \cong \mathbb{C}^{2^c} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{C}^{2^q}) \tag{3}$$

Excitaciones

Definimos una combinación de una excitación de tipo $t \in hom(C, G)^0$ con una de tipo $\gamma \in hom(C, G)_0$ como

$$\rho_{t,\gamma}(A) := \lim_{J \to K} Q_{\gamma_J} P_{t_J} A P^*_{t_J} Q^*_{\gamma_J}$$

Para un estado fundamental sin frustración ω_0, definimos $\omega_{t,\gamma} := \omega_0 \circ \rho_{t,\gamma}$

Excitaciones

Definimos una combinación de una excitación de tipo $t \in hom(C,G)^0$ con una de tipo $\gamma \in hom(C,G)_0$ como

$$\rho_{t,\gamma}(A) := \lim_{J \to K} Q_{\gamma_J} P_{t_J} A P^*_{t_J} Q^*_{\gamma_J}$$

Para un estado fundamental sin frustración ω_0, definimos $\omega_{t,\gamma} := \omega_0 \circ \rho_{t,\gamma}$

Teorema

Sea $t, t' \in hom(C,G)^0$ y $\gamma, \gamma' \in hom(C,G)_0$. Luego $\omega_{t,\gamma} = \omega_{t',\gamma'}$ si y sólo si $\gamma(I) = \gamma'(I)$ para todo $I \in ker(\delta^0)$ con soporte finito y $\chi(t) = \chi(t')$ para todo $\chi \in ker(\delta_0)$ con soporte finito.

Tomemos dos endomorfismos ρ y ρ'. Definimos un entrelazador de ρ a ρ' como un operador T tal que,

$$T : T\rho(A) = \rho'(A)T, \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

Teorema (Entrelazadores)

Sea $t, t' \in hom(C, G)^0$ *y* $\gamma, \gamma' \in hom(C, G)_0$ *tales que existen* $\hat{t} \in hom(C, G)^0_f$, $\overline{t} \in hom(C, G)^{-1}$ *y* $\hat{\gamma} \in hom(C, G)^f_0$, $\overline{\gamma} \in hom(C, G)_1$ *con*

$$t' = t - \hat{t} + \delta^{-1}\overline{t}$$
$$\gamma' = \gamma - \hat{\gamma} + \delta_1\overline{\gamma}$$

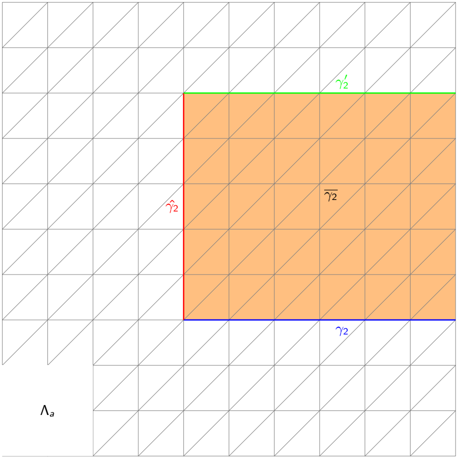
Entonces existe un entrelazador unitario V *de* $\rho_{t,\gamma}$ *a* $\rho_{t',\gamma'}$ *tal que* $Q_{\hat{\gamma}}P_{\hat{t}}V\Omega_0 = \Omega_0$

Además,

$$V_J := P_{-\hat{t}}P_{\delta^{-1}\overline{t}_J}Q_{-\hat{\gamma}}Q_{\delta_1(\overline{\gamma}_J)}$$

converge en la topología fuerte a V cuando $J \to K$.

Ejemplo Intertwiner



Braiding

Definition

El braiding es un entrelazador de $\rho_1 \circ \rho_2$ a $\rho_2 \circ \rho_1$

Definition

El braiding es un entrelazador de $\rho_1 \circ \rho_2$ a $\rho_2 \circ \rho_1$

Ahora queremos definir un entrelazador de $\rho_{t_1,\gamma_1} \circ \rho_{t_2,\gamma_2}$ a $\rho_{t_2,\gamma_2} \circ \rho_{t_1,\gamma_1}$. Esto se puede hacer mediante

$$\varepsilon_{(t_1,\gamma_1),(t_2,\gamma_2)}(I, V_2) := \lim_{J \to K} V_2^* \rho_{t_1,\gamma_1}(V_{2,J})$$

donde V_2 es un entrelazador de ρ_{t_2,γ_2} a $\rho_{t_2',\gamma_2'}$ como en el teorema anterior.

Definition

El braiding es un entrelazador de $\rho_1 \circ \rho_2$ a $\rho_2 \circ \rho_1$

Ahora queremos definir un entrelazador de $\rho_{t_1,\gamma_1} \circ \rho_{t_2,\gamma_2}$ a $\rho_{t_2,\gamma_2} \circ \rho_{t_1,\gamma_1}$. Esto se puede hacer mediante

$$\varepsilon_{(t_1,\gamma_1),(t_2,\gamma_2)}(I, V_2) := \lim_{J \to K} V_2^* \rho_{t_1,\gamma_1}(V_{2,J})$$

donde V_2 es un entrelazador de ρ_{t_2,γ_2} a $\rho_{t_2',\gamma_2'}$ como en el teorema anterior.

Este límite existe en la topología fuerte y es igual a cI donde

$$c = \hat{\gamma}_2(t_1)\overline{\gamma_2}(-\delta^0 t_1)\gamma_1(-\hat{t}_2)\delta_0\gamma_1(\overline{t_2})$$

Proposición

Sea $\hat{s}_2 \in hom(C,G)^0_f$, $\bar{s}_2 \in hom(C,G)^{-1}$ *tal que*

$$s_2 = t_2 - \hat{s}_2 + \delta^{-1}\overline{s_2}$$

Sea $\hat{\alpha}_2 \in hom(C,G)^f_0$, $\overline{\alpha_2} \in hom(C,G)_1$ *con*

$$\alpha_2 = \gamma_2 - \hat{\alpha}_2 + \delta_1\overline{\alpha_2}$$

Si $supp(\delta_0\gamma_1) \cap supp(\overline{t_2} - \overline{s_2}) = \emptyset = supp(\delta^0 t_1) \cap supp(\overline{\gamma_2} - \overline{\alpha_2})$, $\gamma_1(-\hat{s}_2) = \gamma_1(-\hat{t}_2)$ *y* $\hat{\gamma}_2(t_1) = \hat{\alpha}_2(t_1)$ *entonces*

$$\varepsilon_{(t_1,\gamma_1),(t_2,\gamma_2)}(I, V_2) = \varepsilon_{(t_1,\gamma_1),(t_2,\gamma_2)}(I, \tilde{V}_2)$$

donde $\tilde{V}_2$ *es un entrelazador de* ρ_{t_2,γ_2} *a* ρ_{s_2,α_2}

Ejemplo

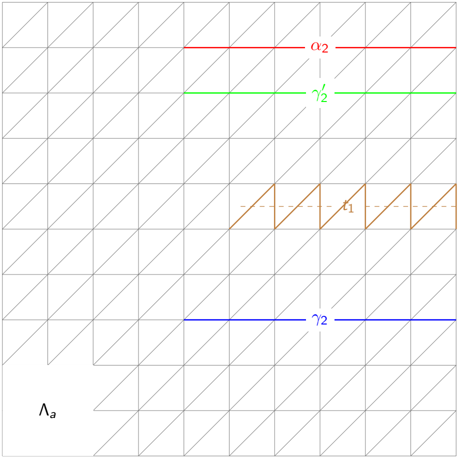


Figura: γ_2' y α_2 generan el mismo braiding

Ejemplo

ya que